EXERCICES D'ANALYSE

Analyse réelle

Exercice 1 (Sup/Inf)**.**

(1) Donner le sup, et l'inf des ensembles suivants : $\{0\}$, $]0,1[$, $[0,1]$, $]1,+\infty[$, $[0,1]\cup[2,3]$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$. Dans quels cas a-t-on un max ?

(2) Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide, montrer qu'il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n x_n = \sup A$.

(3) Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide, tel que $\sup A = \inf A$. Que peut-on dire de A ?

Exercice 2 ($\limsup$, $\liminf$)**.**

(1) Soit $x_{2n} = \frac{1}{n}$ et $x_{2n+1} = \frac{n-1}{n}$. Calculer $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$. Faire de même avec $x_n = (-1)^n$.

(2) Soit x_n une suite bornée par en dessous (i.e. il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n, $x_n \geq C$). Que peux-t-on en déduire concernant $\limsup_{n\to+\infty} x_n$?

(3) Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \sup\{a \ : \exists$ sous-suite $x_{\varphi(n)}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = a\}$.

Exercice 3 (Convergence simple/uniforme)**.** Étudier les convergences simples/uniformes des suites de fonctions définies par :

(1) x^n, $(1-x)x^n$ et $n(1-x)x^n$ sur $[0,1]$;

(2) $\frac{x}{1+nx}$ et $\frac{1}{1+nx}$ sur $[0,1]$;

(3) $nx^2\exp(-nx)$ sur $[0,\pi]$.

Exercice 4 (Escalier de Cantor)**.** On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ de la manière suivante. Pour tout $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} s'obtient à partir de f_n comme suit :

— pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}f_n(3x)$,
— pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$,
— pour tout $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}f_n(3x-2) + \frac{1}{2}$.

(1) Représenter les graphes des premiers termes de cette suite.

(2) Montrer que la série $\sum_n (f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(3) Indication : on pourra commencer par montrer que $\|f_{n+1}-f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$.

(4) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Dessiner (grossièrement) l'allure de la limite, que l'on notera f. La fonction f est-elle continue ?

(5) Montrer que f est dérivable et de dérivée nulle sur une réunion d'intervalles de longueur totale égale à 1. Commenter.

Intégration

Exercice 5. Montrer que le demi plan ouvert $y > x$ de $\mathbb{R}^2$ appartient à la tribu borélienne.

Exercice 6 (Mesurabilité)**.** Soit $f_k : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k$ et $\liminf_{k\to\infty} f_k$ sont mesurables. En particulier, si f_k converge simplement vers f, alors f est mesurable.

Exercice 7 (Lemme de Fatou)**.** Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

(1) Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.

(2) Vérifier que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes, si elles existent

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x^3} d\mathrm{x},$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{n+x}\right)}{x^2} d\mathrm{x},$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{2n} d\mathrm{x}.$$

Espaces métriques

Exercice 9 (Exemples d'espaces métriques)**.**

(1) Est-ce que $C^0([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ pour $1 \le p < +\infty$ est un espace métrique complet ?

(2) Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques complets. Montrer que $E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \ : \ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$ muni de la distance $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$ est un espace métrique complet.

(3) Plus généralement, soient (E_k, d_k) une suite d'espaces métriques complets tels que $d_k(x,y) \le 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in E_k$. On munit l'espace produit $E = \prod_{k=1}^{+\infty} E_k = \{x = (x_k)_{k\ge 1} \ : \ x_k \in E_k\}$ de la distance $d(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} d_k(x_k, y_k)$. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet. Montrer de plus que $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ converge vers $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si et seulement si x_k^n converge vers x_k dans (E_k, d_k).

Exercice 10 (Ensembles ouverts/fermés)**.**

1. Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $f : E_1 \to E_2$ une fonction continue. Montrer que si $F \subset E_2$ est fermé alors $f^{-1}(F)$ est un fermé de E_1.

2. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont elles ouvertes, fermées ?
$A = \{0 \le x \le 1,\ y = 0\}$, $B = \{y > 0\}$, $C = \{x^2 - y^2 = 1\}$, $D = \{0 < x < 1,\ y = 0\}$.

Exercice 11 (Fonctions coercives et continues)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12 (Intersection décroissante de compacts)**.** Soit K_n une suite décroissante de compacts non vides de X i.e. $K_{n+1} \subset K_n$. Montrer que $K = \cap_{n\geq 1} K_n$ est un compact non vide. Soit f une fonction continue de $X \mapsto Y$. Montrer que $f(\cap_{n\geq 1} K_n) = \cap_{n\geq 1} f(K_n)$.

Exercice 13 (Un théorème de point fixe)**.** Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X\ , x \neq y\ .$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

(1) Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.

(2) Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n\geq 0} X_n$ n'est pas vide.

(3) Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zéro.

(4) Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \to p$, lorsque $n \to +\infty$.

(5) En considérant la fonction $x \to d(f(x), x)$ donner une autre démonstration de l'existence d'un point fixe.

Exercice 14 (Compacité de la boule unité)**.** Soit $(E, |\cdot|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$) et $\overline{B}_1$ sa boule unité fermée.

(1) Montrer que si E est de dimension finie alors $\overline{B}_1$ est compacte.

(2) Soit F un sev fermé de E avec $E \neq F$. Montrer que $\sup_{x\in\overline{B}_1} d(x, F) = 1$. Pour cela, on fixera $x \in E\backslash F$ et on considérera pour $y \in F$ tel que $|x - y| = d(x, F)$ le point $\bar{x} = \frac{x-y}{|x-y|} \in \overline{B}_1$.

(3) On suppose que $\overline{B}_1$ est compacte. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \cdots, x_k \in \overline{B}_1$ tels que $\overline{B}_1 \subset \cup_{i=1}^k B_\epsilon(x_i)$. En déduire que E est de dimension finie (on pourra considérer le sous-espace vectoriel engendré par les x_i).

Exercice 15. Connexité.

(1) Donner les composantes connexes de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

(2) Soit $(E, |\cdot|)$ un evn de dimension plus grande que 2. Montrer que $\partial B_1 = \{x\ : |x| = 1\}$ est connexe. On pourra commencer par considérer pour $x, y \in \partial B_1$ avec $x \neq -y$ et $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) = \frac{(1-t)x+ty}{|(1-t)x+ty|}$.

(3) Montrer que le groupe des rotations du plan SO_2 est connexe. En déduire les composantes connexes du groupe O_2.